Title	群の自由積分群に関して
Author(s)	髙橋, 陸男
Citation	全国紙上数学談話会. 2(6) p.188-p.190
Issue Date	1947-09-08
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75200
rights	
Note	

65. 群の自由積分解に関して

阪大　　高橋　陞男

Mathematical Review をみて居ましたら、次の論文が既に出て居る事を知りました。

F. Levi; *On the number of generators of a free product, and a lemma of A. Kurosch* (Journ. Indian Math. Soc. (N.S., 5 (1941))

Kursch の lemma となる分 *Zum Zerlegungsproblem der Theorie der freien Produkte* (Recueil Math. 44 (1937)) に出て居る。次の補助定理だと思はれます。

$\boxed{\text{lemma}}$

$$\left.\begin{array}{l} G = A * B \\ 1 \neq g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \in A \end{array}\right\} \rightarrow g_1, g_2 \in A$$

之の証明は前に、部分群定理を使って簡単に証明出来る事を知りましたので、多分 Levi のと同様だらうとは思ひますが、簡単に一應報告することにします。

I. 部分群定理　$G = A * B$. $G \supset U \rightarrow U = F * \prod_x^{*}(U \cap A^x) * \prod_y^{*}(U \cap B^y)$

II. Gruschko の lemma　$G = A * B \rightarrow \mu(G) = \mu(A) + \mu(B)$

ここに $\mu(H)$ は群 H を生成する元の最小個数

I. は周知（R. Baer, F. Levi. Compositio Math. (1936)
M. Takahasi 学士院記事 (1944)）

II はも少し精密な形で Gruschko が証明して居ります.（Rec Math. N.S 8(50) 1940）

II の方に関しては 上記の Levi の論文や 又同じく Math Reirew に出ていました.

B. H. Neumann: On the number of generators of a free product (Journ. London Math. Soc. 18 (1943)) 等で 尚論じられてゐる事だらうと思はれます.

I. II を使って Kurosch の lemma は次の様に証明出来ます.

$\{g_1, g_2\} = K$ とすると $K \cap A \ni g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \neq 1$ だから

$K \cap A \neq 1$

故に I から　$K = (K \cap A) * L$.

II から

$$2 \geqq \mu(K) = \mu(K \cap A) + \mu(L)$$

$K \cap A \neq 1$　だから

$$\mu(K \cap A) \neq 0$$

$\mu(K \cap A) = 1$　即ち　$K \cap A = (a)$. cyclic とすると.

$$1 \neq g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \in K_2 \cap (K \cap A) = K_2 \cap A = (K \cap A)_2 = (a)_2 = 1$$

（2. H_2 は群 H の交換子群）之は矛盾ですから

$\mu(K \cap A) = 2$　$\mu(L) = 0$　即ち $L = 1$　$\therefore$ $K = K \cap A$ 即 $K \leq A$

従つて勿論 $g_1, g_2 \in A$.

Kurosch の元の証明に比べれば、非常に簡單にすむ訳です。

(1947. 9. 8)